Equações de Terceiro Grau

Aspecto Histórico e Algébrico

Igor Henrique
Ítalo Augusto
Jackson Willian

Orientador: Prof. José Alves Neto

História da Solução de Equações de Terceiro Grau

Durante quase três mil anos, buscou-se encontrar um método para solucionar problemas que envolviam equações de terceiro grau.

Primeiramente, a dedução do método para equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ foi feita pelo matemático **Scipione del Ferro** em 1505, entretanto não a publicou porque, acredita-se, a utilizaria como “arma” em “duelos intelectuais”, muito comuns naquela época. Ferro nunca publicou sua descoberta, tendo-a confiado somente a dois discípulos, entre eles, **Antônio Maria Fiore.**

História da Solução de Equações de Terceiro Grau

Tendo esta arma, **Fiore** tentou adquirir reconhecimento. Desafiou, então, o renomado matemático **Niccoló Tartaglia** para um "duelo intelectual".

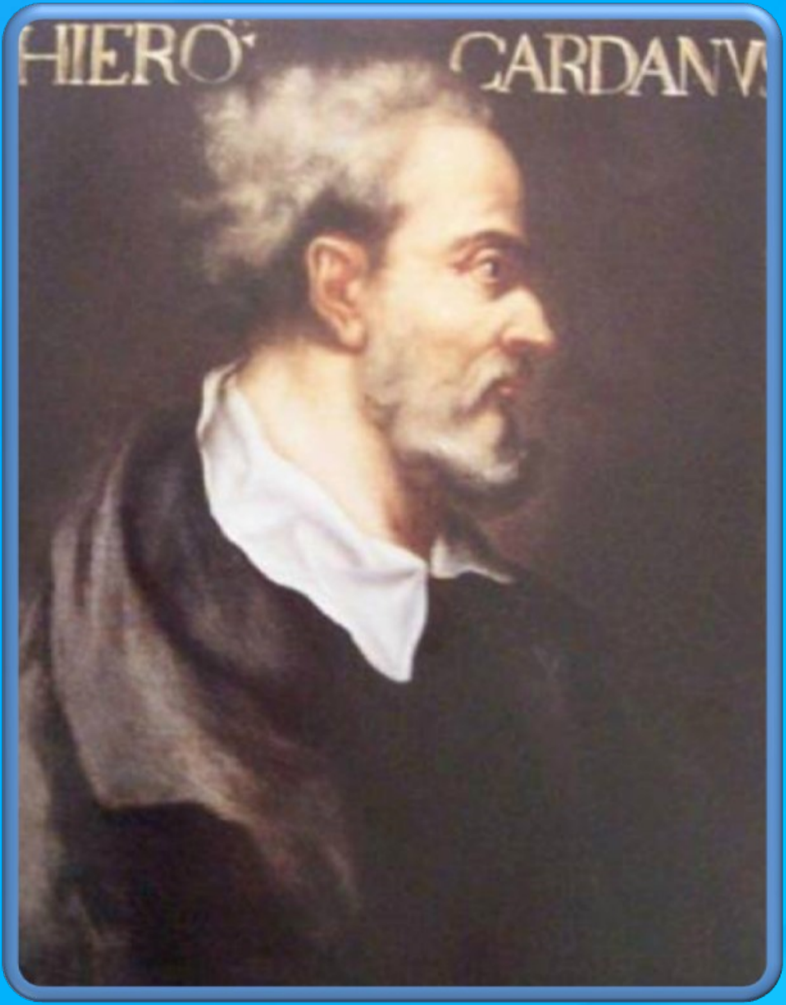
Niccoló Tartaglia (1499–1557)

História da Solução de Equações de Terceiro Grau

Durante a disputa, **Fiore** propôs problemas que envolviam, direta ou indiretamente, equações de terceiro grau. Porém, **Tartaglia** acabou descobrindo um método para a resolução das equações do tipo $\mathbf{x^3 + px + q = 0}$ e $\boldsymbol{x^3 + px^2 + q = 0}$, *a qual* ***Fiore*** *desconhecia.* Conseguiu assim, resolver todas as questões propostas por este.

O resultado deste duelo teve grande repercussão, chegando até **Cardano**, renomado matemático de Milão.

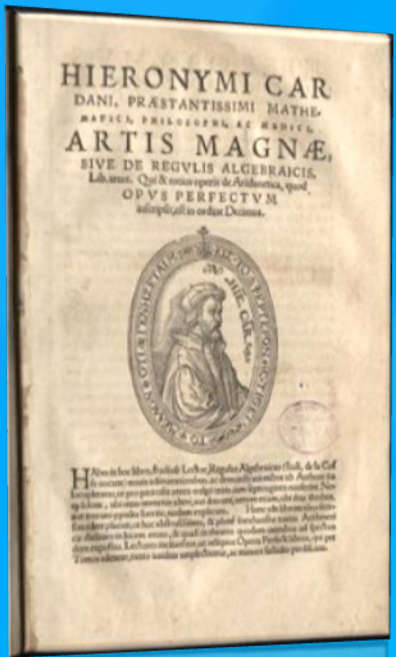
Girolamo Cardano (1501–1576)



História da Solução de Equações de Terceiro Grau

Cardano, então, procurou **Tartaglia** a fim de persuadi-lo, utilizando-se de diversos meios, a entregar-lhe a fórmula. Conseguiu então, com a condição de não publicar, a regra para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, sem nenhuma indicação de prova. **Cardano** então, com a ajuda de seu discípulo **Ludovico Ferrari**, conseguiu uma prova para a regra dada por **Tartaglia** e mostrou que é possível eliminar o termo x^2 nas equações do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ substituindo-se x por $y - a/3$.

História da Solução de Equações de Terceiro Grau


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
OPVS PERFECTVM

Ars Magna - Cardano

Vale observar que em verdade não foram deduzidas fórmulas, mas regras para a resolução de tipos especiais de equações de terceiro grau. **Cardano** e **Ferrari**, visitando a cidade de Bolonha, obtiveram permissão para examinar os manuscritos de Del Ferro, e ali encontraram a fórmula. **Cardano** publicou a fórmula em seu livro *Ars Magna* (Grande Arte), considerando que estava publicando a descoberta de Ferro, não a de **Tartaglia**.

História da Solução de Equações de Terceiro Grau

Tartaglia sentiu-se traído e acusou **Cardano** de quebrar um solene juramento ao publicar a regra em seu novo livro. Ainda que **Cardano** tenha citado a descoberta da fórmula por Ferro e a redescoberta por **Tartaglia**, **Cardano** ficou com todos os créditos.

História da Solução de Equações de Terceiro Grau

Igreja Frati Zoccolanti - Milão

Com isso, iniciou-se um embate entre **Ferrari** e **Tartaglia**. O duelo, ocorrido entre 1547 e 1548, deu origem a doze panfletos, conhecidos por *Cartelli de sfida mathematica*, onde cada parte expôs as suas razões.

O debate final ocorreu no dia 10 de Agosto de 1548, no jardim da igreja Frati Zoccolanti em Milão.

História da Solução de Equações de Terceiro Grau

As autoridades universitárias de Bréscia, para onde **Tartaglia** acabara de ser transferido, ficaram insatisfeitas com o seu desempenho, o que resultou em sua demissão. Toda esta história culmina com a morte do esquecido **Tartaglia** e a fama de **Cardano** que por muito tempo teve seu nome associado à fórmula.

Aspecto Algébrico

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Problema: Estamos interessados em deduzir uma fórmula para resolver equações do tipo

$$\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)}$$

Para $a \neq 0$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Inicialmente vamos dividir a equação pelo coeficiente a, para obter a equação

$$x^3 + \frac{b \cdot x^2}{a} + \frac{c \cdot x}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

e como este procedimento é sempre possível, pois a ≠ 0, podemos então considerar as equações do tipo:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

- Façamos $x = y - \frac{a}{3}$, para eliminarmos o termo em x^2, isto é:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\cdot\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\cdot\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 - \frac{3\cdot y^2\cdot a}{3} + \frac{3\cdot y\cdot a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + a\left(y^2 - \frac{2\cdot y\cdot a}{3} + \frac{a^2}{9}\right) + b\cdot y - \frac{a\cdot b}{3} + c = 0$$

$$y^3 - a\cdot y^2 + \frac{a^2\cdot y}{3} - \frac{a^3}{27} + a\cdot y^2 - \frac{2\cdot a^2 y}{3} + \frac{a^3}{9} + b\cdot y - \frac{a\cdot b}{3} + c = 0$$

$$y^3 - \frac{a^2\cdot y}{3} + b\cdot y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a\cdot b}{3} + c\right) = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\cdot y + \left(\frac{2\cdot a^3}{27} - \frac{a\cdot b}{3} + c\right) = 0$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Fazendo $b - \frac{a^2}{3} = p$ e $\frac{2 \cdot a^3}{27} - \frac{a \cdot b}{3} + c = q$

e substituindo na equação acima, temos

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2)$$

Pensando em *y* como soma de duas parcelas, *u* e *v*, substituímos *y* em (2) por

$$y = u + v \qquad (3)$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

$$y = u + v$$

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^3$$

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uvy$$

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0 \qquad (4)$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Comparando **(4)** com **$y^3 + py + q = 0$, temos:**

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \cdot v = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Podemos agora encarar u^3 e v^3 como sendo as soluções de uma equação do segundo grau , da qual conhecemos a soma e o produto das raízes, ou seja:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Utilizando a fórmula de Báskara, encontramos:

$$w_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$w_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Logo:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Substituindo os resultados em (3) vem:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Esta é a fórmula de Cardano-Tartaglia para a resolução de equações do 3º grau.

Solução de equação do 3° grau por meio de Radicais

Observe que a fórmula, diferentemente da de Báskara, fornece apenas uma raiz da equação (2).

O termo $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ é o discriminante da equação e, tal como em uma equação do 2º grau ele tem a função de nos informar o tipo de solução que a equação terá.

Exemplos

1. $x^3 - 6 \cdot x - 9 = 0$

Aqui $p = -6$ e $q = -9$ e

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{2187 - 864}{108} = \frac{1323}{108} = \frac{49}{4}$$

$$y = u + v = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$y = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

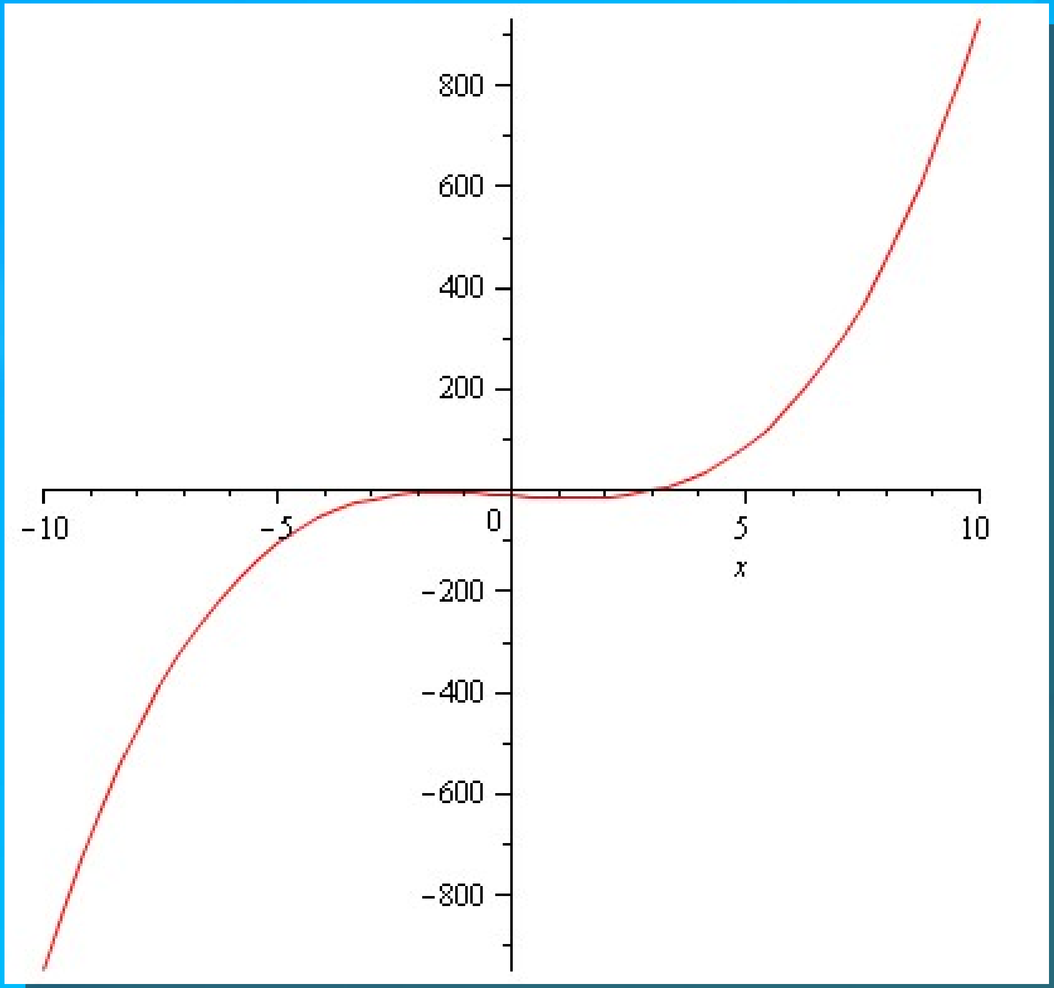
Exemplos

Para encontrarmos as outras duas raízes dividimos o polinômio $x^3 - 6x - 9 = 0$ pelo binômio $x - 3$ e encontramos $x^2 + 3x + 3$, isto é, $x^3 - 6x - 9 = (x - 3).(x^2 + 3x + 3) = 0$. Daí resolvendo obtemos:

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Exemplos

Gráfico:



Exemplos

$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

Inicialmente devemos colocar esta equação na forma $y^3 + py + q = 0$.

Para tanto, fazemos $x = y - \frac{1}{3}$

Obtemos então, $27y^3 - 225y - 250 = 0$, ou, equivalentemente, $y^3 - \frac{25}{3} \cdot y - \frac{250}{27} = 0$.

Aqui $p = -\frac{25}{3}$ e $q = -\frac{250}{27}$. Temos:

Exemplos

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{\left(\frac{250}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{25}{3}\right)^3}{27} = 0.\ \text{Logo,}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{125}{27} + 0} + \sqrt[3]{\frac{125}{27} - 0} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}.\ \text{As outras raizes são:}$$

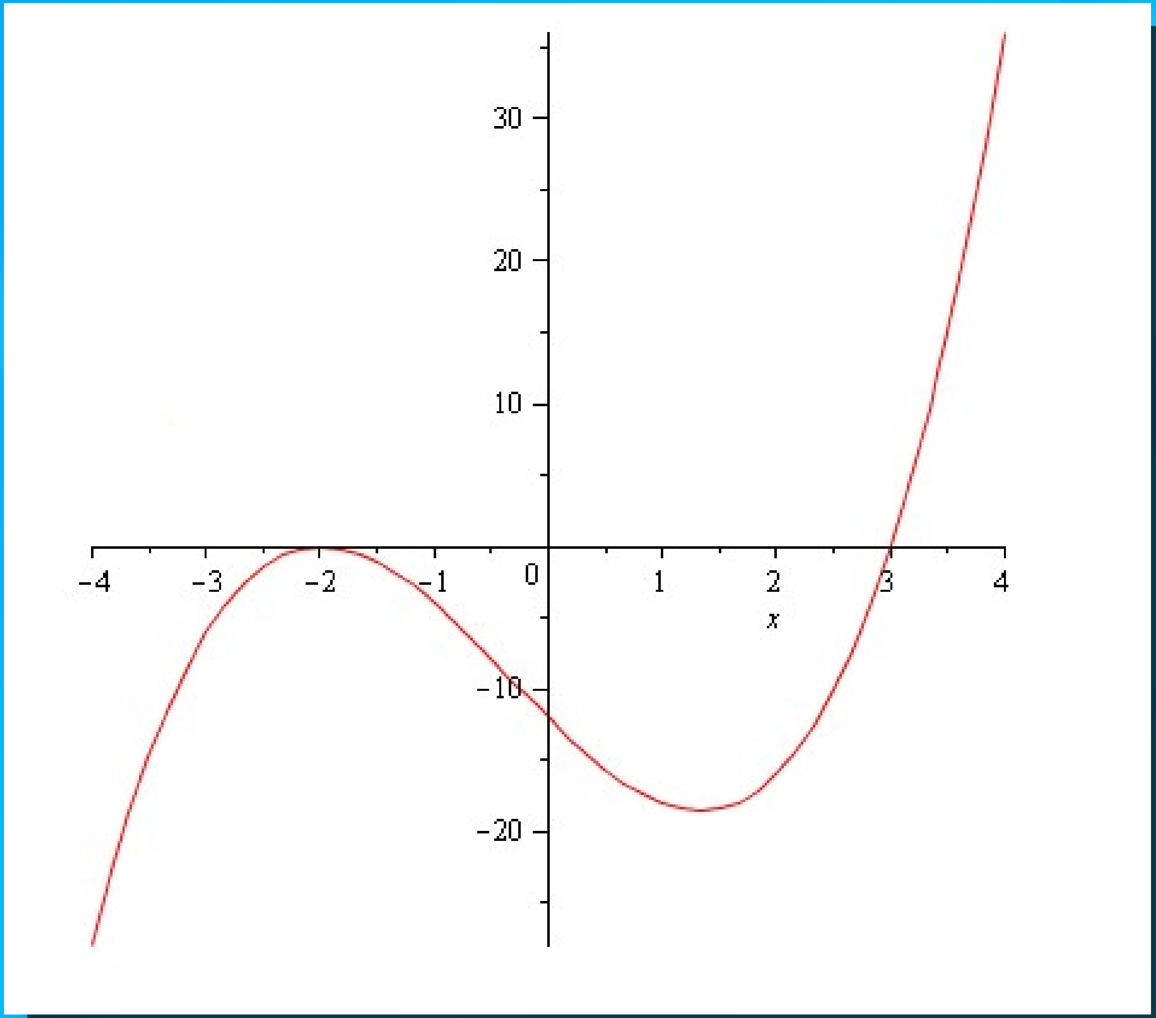
$$y_2 = y_3 = -\frac{5}{3}$$

Logo, os valores de x são obtidos pela expressão $x = y - \frac{1}{3}$. O que nos dá:

$$x_1 = 3 \quad e \quad x_2 = x_3 = -2$$

Exemplos

Gráfico:



Bibliografia:

1. LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro-RJ, SBM, 1991

2. GARBI, Gilberto Geraldo. O Romance da Equações Algébricas. São Paulo-SP, Makron Books, 1997.

Ferramenta Computacional:

Maple 11 – Waterloo Maple INC. Waterloo, Ontário, Canadá.